2024 MODS Geometry Contest

Doubt Yourself

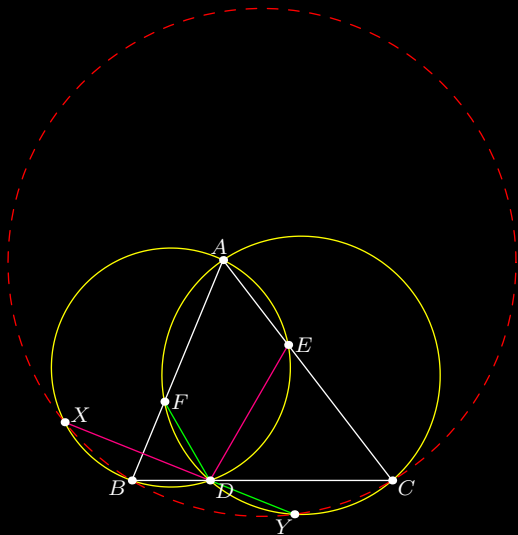
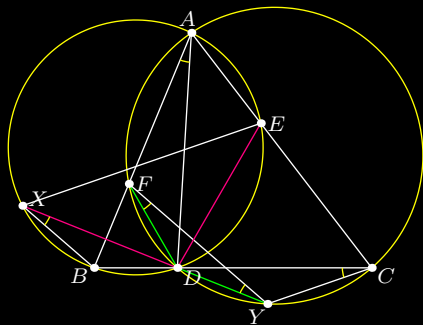
André Pinheiro

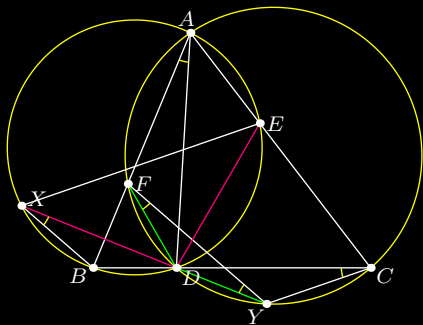
Fevereiro de 2024

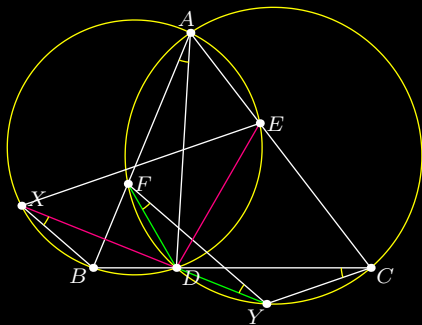
Problema

Seja ABC um triângulo acutângulo e um ponto D no segmento BC. Sejam E, F a interseção das circunferências ABD e ACD com os lados AC e AB respetivamente. Os pontos X e Y estão nas circunferências ABD e ACD respetivamente, tal que $DE = DX$ e $DF = DY$.

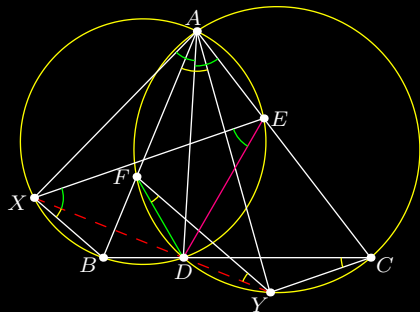
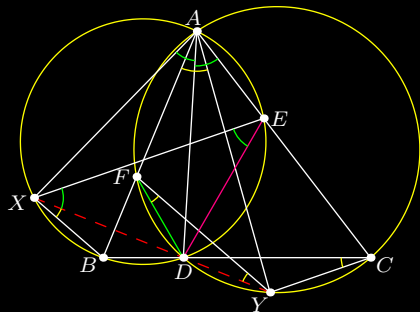
Prove que os pontos B, X, C e Y são conciclicos.

Diagrama

Solução

Por angle-chasing, temos que

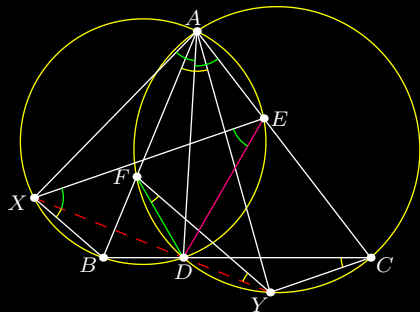
Solução

Por angle-chasing, temos que $\angle DCY = \angle DFY = \angle DYF = \angle DAF = \angle DXB$

Solução

Por angle-chasing, temos que $\angle DCY = \angle DFY = \angle DYF = \angle DAF = \angle DXB$

Estamos quase. Se conseguirmos provar que os pontos Y, D, X são colineares, então o problema está resolvido. Vamos tentar mais um pouco de angle-chasing.

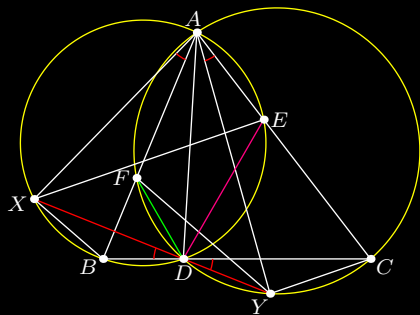
Solução

Ora, temos que $\angle XAD = \angle XED = \angle DXE = \angle DAE$.

Ora, temos que $\angle XAD = \angle XED = \angle DXE = \angle DAE$.

Além disso, temos que $\angle FAD = \angle FYD = \angle DFY = \angle DAY$.

Solução

Ora, temos que $\angle XAD = \angle XED = \angle DXE = \angle DAE$.

Além disso, temos que $\angle FAD = \angle FYD = \angle DFY = \angle DAY$.

Ou seja, AD é a bissetriz dos ângulos $\angle BAY$ e $\angle XAC$.

Solução

Ora, temos que $\angle XAD = \angle XED = \angle DXE = \angle DAE$.

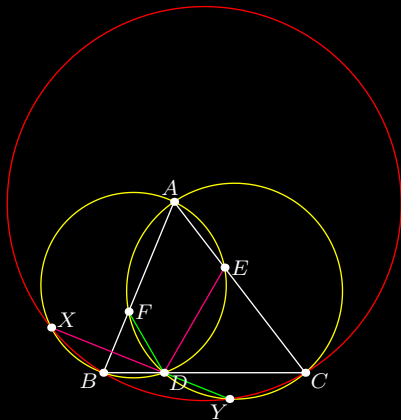
Além disso, temos que $\angle FAD = \angle FYD = \angle DFY = \angle DAY$.

Ou seja, AD é a bissetriz dos ângulos $\angle BAY$ e $\angle XAC$. Portanto, podemos concluir que $\angle XAB = \angle YAC$.

Solução

Ora, temos que $\angle XAD = \angle XED = \angle DXE = \angle DAE$.

Além disso, temos que $\angle FAD = \angle FYD = \angle DFY = \angle DAY$.

Ou seja, AD é a bissetriz dos ângulos $\angle BAY$ e $\angle XAC$. Portanto, podemos concluir que $\angle XAB = \angle YAC$. Mas como $\angle BDX = \angle XAB = \angle YAC = \angle YDC$, temos que X, D, Y são colineares.

Ora, temos que $\angle XAD = \angle XED = \angle DXE = \angle DAE$.

Além disso, temos que $\angle FAD = \angle FYD = \angle DFY = \angle DAY$.

Ou seja, AD é a bissetriz dos ângulos $\angle BAY$ e $\angle XAC$. Portanto, podemos concluir que $\angle XAB = \angle YAC$. Mas como $\angle BDX = \angle XAB = \angle YAC = \angle YDC$, temos que X, D, Y são colineares.

Portanto, $XBYC$ é cíclico tal como desejavamos. ■